Puissance en régime sinusoïdal forcé

I) Quelques rappels

⊗ Courant continu : $U = cte \quad I = cte$

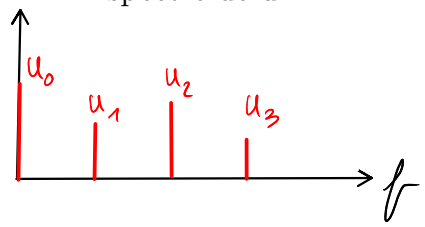
$P = UI$ constante dans le temps

⊕ Courant alternatif : variable dans le temps, périodique de période T

$$u(t) = \underbrace{U_0}_{\text{moyen}} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

spectre de u



→ Valeur instantanée (à t) : $u(t)$

→ Valeur moyenne : $U_{0\,(\text{moyen})} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\,dt$

→ Valeur efficace : $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle_t}$

- Exemple : considérons le signal sinusoïdal :

$$u(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

→ $u(t)$ moyen ? $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} U_1 \int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\, dt$

$$= \frac{1}{T} U_1 \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)\, dt \right]_0^T$$

$$= \frac{U_1}{\omega T} \left(\sin(\underbrace{\omega t}_{2\pi} + \varphi) - \sin\varphi \right)$$

$$\langle u(t) \rangle = 0$$

→ $U_{efficace}$? : $u^2(t) = U_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{U_1^2}{2} \left(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\right)$

$$\langle u^2(t) \rangle = \frac{U_1^2}{2} \left(\langle 1 \rangle + \underbrace{\langle \cos(2\omega t + 2\varphi) \rangle}_{0} \right)$$

$$= \frac{U_1^2}{2}$$

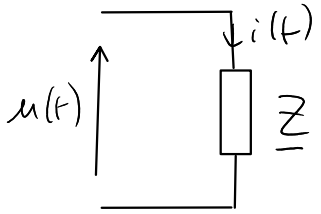
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_1^2}{2}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}$$ pour un signal sinusoïdal

⚠ Ce résultat n'est pas valable pour un signal carré, triangulaire, ...

On verra en TD que pour $u(t) = \sum_i U_i \cos(i\omega t + \varphi_i)$

on a $U_{eff} = \sqrt{\frac{\sum_i U_i^2}{2}} = \sqrt{\sum U_{i\,eff}}$

II) Puissance moyenne et facteur de puissance en régime sinusoïdal



$$\begin{cases} u(t) = U_M \cos(\omega t) \\ i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$ ← pris comme référence des phases

Dans $\mathcal{C}$: $\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$ soit $U_m e^{j\omega t} = \left(Z_0 e^{j\varphi}\right) I_m e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$

$$\boxed{\text{Arg}(\underline{z}) = \varphi}$$

Puissance instantanée reçue par $\underline{z}$: $p(t) = u(t)\, i(t)$

$$= U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi)$$

Puissance moyenne reçue par le dipôle $\underline{z}$:

$$\langle p(t)\rangle = \langle U_m I_m \cos(\omega t).\cos(\omega t-\varphi)\rangle$$

$$= U_m I_m \langle \cos(\omega t).\cos(\omega t-\varphi)\rangle \quad \text{linéarisation}$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} \langle \cos(2\omega t-\varphi) + \cos\varphi\rangle$$

$$= \frac{U_m I_m}{2}\left(\underbrace{\langle \cos(2\omega t-\varphi)\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \cos\varphi\rangle}_{\cos\varphi}\right)$$

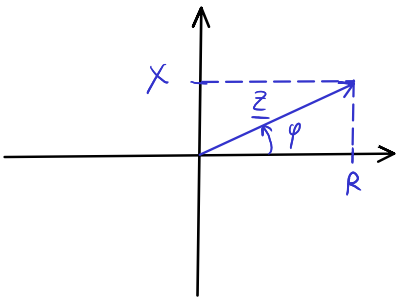
donc $\langle p(t)\rangle = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$ or $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

donc $$\boxed{P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi}$$

$\cos\varphi$ s'appelle le facteur de puissance

- Représentations graphiques :

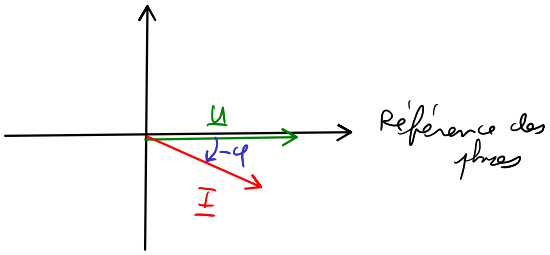
de $\underline{z}$ dans le plan complexe



$\underline{z} = R + jX$

$\begin{cases} R = |\underline{z}|\cos\varphi \\ X = |\underline{z}|\sin\varphi \end{cases}$

Représentation de Fresnel de $\underline{u}$ et $\underline{I}$



* Autres écritures de P_{moy}

① $P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$

Or $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ → $U_{eff} = |\underline{Z}|\, I_{eff}$; $R = Re(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \cos\varphi$

donc $P_{moy} = \overbrace{|\underline{Z}| I_{eff}}^{U_{eff}} \cdot I_{eff} \cos\varphi = |\underline{Z}| \cos\varphi \cdot I_{eff}^2$

$$P_{moy} = R\, I_{eff}^2 \quad \text{avec } R = Re(\underline{Z})$$

$\underline{Z}$ dans laquelle circule i

② $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| e^{-j\varphi}$

donc $Re(\underline{Y}) = |\underline{Y}| \cos(-\varphi) = |\underline{Y}| \cos\varphi$

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi = U_{eff} \frac{U_{eff}}{|\underline{Z}|} \cos\varphi$$
$$= U_{eff}^2 \underbrace{|\underline{Y}| \cos\varphi}_{Re(\underline{Y})}$$

donc $P_{moy} = Re(\underline{Y})\, U_{eff}^2$

⚠ $Re(\underline{Y}) \neq \frac{1}{Re(\underline{Z})}$!

III) Applications

1) Cas du dipôle purement résistif

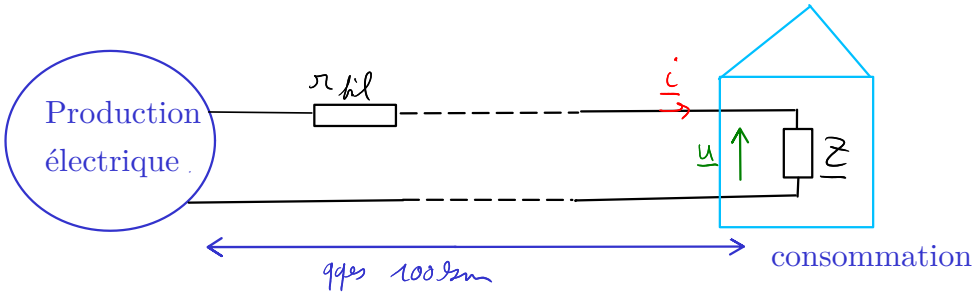
Dipôle réactif $\underline{Z}$: $Re(\underline{Z}) = 0$

Exemples — Inductance : $\underline{Z}_L = jL\omega$; Condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ — sont des dipôles réactifs

$$\mathcal{P}_{moy} = Re(\underline{Z})\, I_{eff}^2 = 0$$

Un dipôle purement réactif ne consomme pas de puissance en moyenne !

2) Utilité d'un facteur de puissance élevé



$U_{eff} = 230\,V$ imposé

L'appareil consommateur $\underline{Z}$ a besoin d'une puissance $\mathcal{P}_0$ fixée :

$$\mathcal{P}_0 = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

(U_{eff}, I_{eff} imposés)

Pour une même puissance $\mathcal{P}_0$ consommée, et un même U_{eff}, un $(\cos\varphi)$ plus faible nécessite I_{eff} plus important.

Or les pertes lors du transport (fil de résistance r_{fil}), les pertes Joule dans le fil sont : $\mathcal{P}_{pertes\ fil} = r_{fil}\, I_{eff}^2$

Un $(\cos\varphi)$ plus faible va donc appeler plus de courant I_{eff} et donc augmenter les pertes Joules du transport.

Exemple : Appareil de puissance $\mathcal{P}_0 = 2300\,W$, fil de transport $r = 1\,\Omega$

- si $\cos\varphi = 1$ $\rightarrow$ $I_{eff} = \dfrac{\mathcal{P}_0}{U_{eff}\cos\varphi} = 10\,A$ $\quad \mathcal{P}_{pertes} = 1 \times 10^2 = 100\,W$
- si $\cos\varphi' = 0{,}7$ $\rightarrow$ $I'_{eff} = \dfrac{\mathcal{P}_0}{U_{eff}\cos\varphi'} = \dfrac{10}{0{,}7} = 13\,A$ $\quad \mathcal{P}_{pertes} = 1 \times 13^2 = 200\,W$

Un $\cos\varphi$ de $0{,}7$ au lieu de 1 induit un doublement des pertes Joules lors du transport !

La législation impose $\cos\varphi \geq 0{,}93$

Remarque : on utilise également des lignes hautes tension pour le transport, de sorte à diminuer I_{eff} dans les lignes

3) Relèvement d'un facteur de puissance

Soit une machine consommatrice d'impédance $\underline{Z} = R + jX$

↳ soit inductive $\underline{Z} = R + j(L\omega)$ $X > 0$

↳ soit capacitive $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$ $X < 0$

Cet appareil peut ne pas avoir un $(\cos\varphi)$ assez grand.

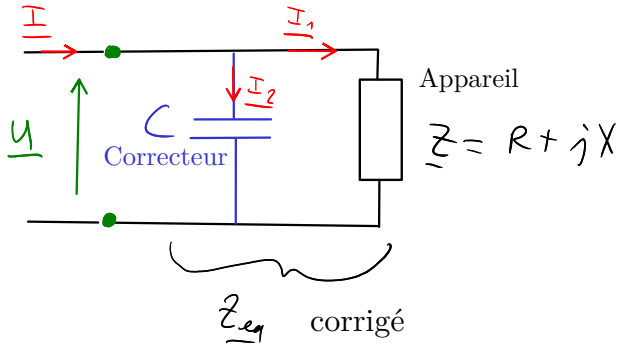
Par exemple, un moteur électrique (machine à laver, ...) contient un bobinage et est donc inductive : $\underline{Z} = R + jL\omega$

Il est alors nécessaire de corriger son facteur de puissance en ajoutant un condensateur de capacité C.

A l'inverse, une machine capacitive nécessitera l'ajout d'une inductance pour être corrigée.

Calculons la capacité C du condensateur à ajouter pour corriger une charge inductive :

charge inductive : $\underline{Z} = R + jX$ avec $X > 0$ (charge inductive)



@ Par le calcul $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z} \,//\, \frac{1}{jC\omega}$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1}{R+jX} + jC\omega = \frac{R-jX}{R^2+X^2} + jC\omega$$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{R}{R^2+X^2} + j\left(C\omega - \frac{X}{R^2+X^2}\right)$$

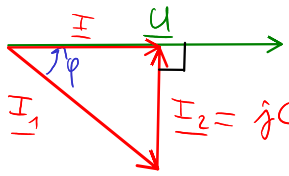
$\cos\varphi = 1 \iff \underline{Y_{eq}}$ réel $\iff \mathrm{Im}(\underline{Y_{eq}}) = 0 \iff C\omega = \frac{X}{R^2+X^2}$

soit $\boxed{C\omega = \frac{X}{|\underline{Z}|^2}}$

Le réseau électrique fournit 50 Hz

donc $\omega = 2\pi \times 50 \Rightarrow C$

(b) Par la représentation de Fresnel



$\left(\text{Arg}(jC\omega) = +\frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{U}$ et $\underline{I}_1$ ne sont donc pas en phase : le déphasage de $\underline{U}$ par rapport à $\underline{I}_1$ est $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$.

Le condensateur placé en parallèle ajoute un courant $\underline{I}_2$:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \qquad \text{(loi des noeuds)}$$

L'objectif est de rendre $\underline{I}$ en phase avec $\underline{U}$:

D'après le diagramme de Fresnel ci-dessus :

$$\sin\varphi = \frac{|\underline{I}_2|}{|\underline{I}_1|} = \frac{C\omega\,|\underline{U}|}{\frac{1}{|\underline{Z}|}|\underline{U}|} = |\underline{Z}|\,C\omega$$

Or $\underline{Z} = R + jX$ donc $\sin\varphi = \frac{X}{|\underline{Z}|}$ $\longrightarrow$ $\boxed{C\omega = \frac{X}{|Z|^2}}$