Systèmes linéaires et stabilité

Chapitre de révisions (sauf la partie stabilité)

I) Le système linéaire continu invariant (LCI)

1) Définitions

Soit un système (électrique, mécanique, ...) qui donne une sortie s(t) à une entrée e(t)



L - Linéaire : si $e_1(t) \xrightarrow{\text{donne}} s_1(t)$ et $e_2(t) \longrightarrow s_2(t)$

alors $\alpha\, e_1(t) + \mu\, e_2(t) \longrightarrow \alpha\, s_1(t) + \mu\, s_2(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

C - Continu : Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type f(t) avec t une variable continue

On l'oppose généralement aux systèmes discrets, en particulier dans le domaine numérique

I - Invariant : Ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps

Si $e(t) \xrightarrow{\text{donne}} s(t)$

alors $e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)$ avec τ un temps

2) Propriétés

Soit un signal sinusoïdal permanent en entrée :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

E_0 : Amplitude ; ω : pulsation ; φ : phase

Une propriété remarquable des systèmes L.C.I. est de donner en sortie un signal également sinusoïdal et de même pulsation ω

On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes L.C.I.

Isomorphe : le signal a la même forme en entrée et en sortie

Donc la sortie s'écrit sous la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$

S_0 ? ; ω idem $e(t)$; φ' ?

⇒ Pour un signal sinusoïdal permanent en entrée, la recherche de la réponse se résume donc à :

- ⟶ Rechercher S0 l'amplitude
- ⟶ Rechercher $(\varphi' - \varphi)$ le déphasage (ou φ')

Remarque : Si on excite un système avec un signal sinusoïdal de pulsation ω en entrée et que la réponse en sortie est non sinusoïdale ou sinusoïdale de pulsation ω' différente : alors le système est non linéaire

II) La fonction de transfert

1) La fonction de transfert (ou transmittance)

On se place ici en régime sinusoïdal permanent

- Rappel des notations complexes :

Dans $\mathbb{R}$: $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $\longrightarrow$ Dans $\mathbb{C}$: $\underline{e} = E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{E}\, e^{j\omega t}$

$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$ $\longrightarrow$ $\underline{s} = S_0 e^{j\varphi'} e^{j\omega t} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$

On a $e(t) = \mathrm{Re}(\underline{e})$ $\quad \underline{E} = E_0 e^{j\varphi}$

$s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s})$ $\quad \underline{S} = S_0 e^{j\varphi'}$

- Définition de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0 e^{j\varphi'} e^{j\omega t}}{E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j(\varphi' - \varphi)}$$

Pour obtenir le signal de sortie réponse de e(t) sinusoïdal permanent, il suffit de connaître $\underline{H}(j\omega)$:

- $|\underline{H}| = \frac{S_0}{E_0}$: rapport des amplitudes appelé gain G
- $\mathrm{Arg}(\underline{H}) = \varphi' - \varphi$: avance de phase du signal de sortie sur le signal d'entrée appelé déphasage

Le signal de sortie est alors (dans $\mathbb{R}$) :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi') = E_0 |\underline{H}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \arg(\underline{H}(j\omega)))$$

2) Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

En électricité, on peut associer des résistances R, des bobines L, des condensateurs C.

Les courants i et tensions u sont alors reliées entre elles par des relations différentielles linéaires :

$$u = Ri \quad ; \quad u = L\frac{di}{dt} \quad ; \quad i = C\frac{du}{dt} \quad , \ldots$$

En les associants, on peut trouver une équation différentielle reliant e(t) à s(t) à l'aide de la loi des noeuds et de la loi des mailles :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \ldots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} = a_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (1)$$

L'ordre du filtre est n ($n \geq m$ admis)

Remarque : Un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est L.C.I.

- Pour un signal sinusoïdal permanent :

Plaçons nous dans $\mathbb{C}$:

$$\underline{e} = E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \qquad \frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega \times \underline{e}$$

donc $\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega$ dans $\mathbb{C}$

D'où :

- Pour une bobine : $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} \rightarrow \underline{u} = Lj\omega\,\underline{i}$

$\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$ avec $\underline{z} = jL\omega$

- Pour un condensateur : $\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} \rightarrow \underline{i} = Cj\omega\,\underline{u}$

$\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$ avec $\underline{z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'équation (1) peut donc s'écrire dans $\mathbb{C}$

$$b_0 \underline{s}(t) + b_1 \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\underline{s}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{s}(t)}{dt^m} = a_0 \underline{e}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{e}(t)}{dt^m} \quad (2)$$

avec les b_i et les a_i réels (car $Re((2)) = (1)$)

soit $b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{e}$

soit, en factorisant par $\underline{s}$ et par $\underline{e}$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}$$

soit $$\boxed{\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^{n} b_k (j\omega)^k}}$$

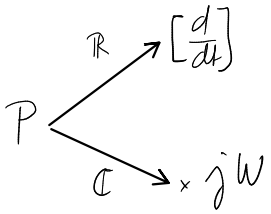
A l'ordre 2 (au programme) :

$$\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

a_0, a_1, a_2
b_0, b_1, b_2 sont réels

3) Notations de Laplace et transposition entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Notation de Laplace



$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{S}{E}$$

(a_i et b_i réels)

soit $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2] S = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2] e$

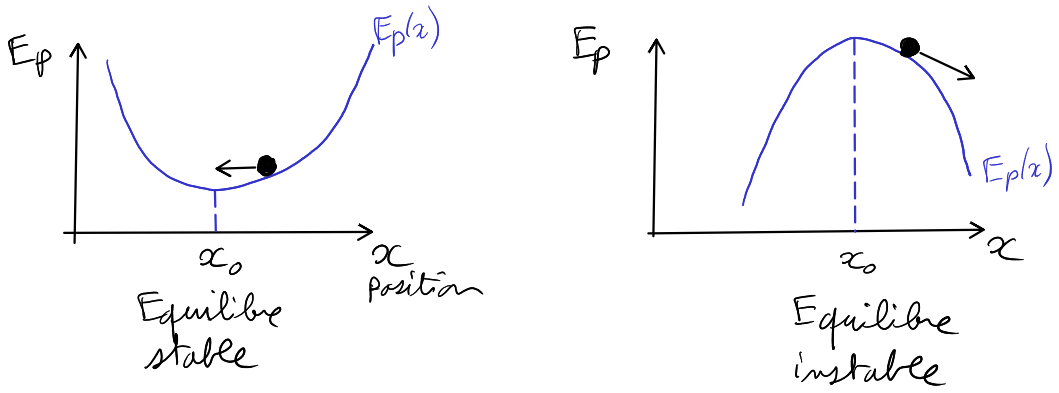
et donc $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$

III) Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

1) A partir de l'équation différentielle

Ces problèmes de stabilité ont déjà été étudiés en mécanique : nous allons généraliser cette étude en électricité.

- Rappel : Prenons l'exemple d'une bille placée dans un puits de potentiel, ou proche d'un maximum :



Écartons la bille de sa position d'équilibre x_0.

Dans le cas
- d'un équilibre stable : la bille est ramenée vers x_0
- d'un équilibre instable : la bille s'en écarte

Si les forces s'appliquant sur la bille dérivent d'une énergie potentielle, il suffit de rechercher si l'équilibre correspond à un minimum ou à un maximum de Ep(x) pour en déduire la stabilité.

Sinon, il faut revenir à l'équation du mouvement, écarter la bille de sa position initiale au départ, et étudier si elle revient alors vers x_0 ou au contraire si elle s'en éloigne.

Pour cela, nous allons appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique, et obtenir une équation différentielle du mouvement dont la solution est de la forme :

$x(t) =$ sol particulière (x_0 (équilibre)) + sol ESSM (Homogène)

ou

- 0 → STABLE
- diverge → INSTABLE

→ Quand la solution homogène tend vers 0, x(t) tend vers la solution particulière qui est l'équilibre : le système est stable

→ Quand la solution homogène diverge, x(t) diverge et le système est instable

En électricité, nous pouvons utiliser la même méthode pour étudier la stabilité :

① Recherche de l'équation différentielle

$$b_0 s(t) + b_1 s'(t) + b_2 s''(t) = a_0 e(t) + b_1 e'(t) + b_2 e''(t)$$

$e(t)$ est imposé, donc le second membre est connu

② La solution est alors $s(t) = s_p(t) + s_H(t)$

$s_p(t)$: solution particulière = régime permanent

$s_H(t)$: solution homogène (sol. ESSM) ou 0 (STABLE) ou diverge (INSTABLE)

L'ensemble de la solution $s_p(t) + s_H(t)$ décrit le régime transitoire

Le système est stable si la solution homogène $s_H(t)$ tend vers 0

Dans le cas d'un système stable, une fois le régime transitoire terminé, le régime établi (ou permanent) est décrit par la solution particulière de l'équation différentielle

Remarques :

- Dans le cas d'un régime libre : $e(t) = 0 \ \forall t$

  La solution particulière est alors $s_p(t) = 0$

- Il existe théoriquement une situation à part pour laquelle $s_H(t)$ ne diverge pas et ne tend pas non plus vers 0. Ce cas à part sera mis à profit dans un chapitre ultérieur pour concevoir des oscillateurs électroniques quasi-sinusoïdaux.

Pour un système stable :

- Au départ : régime transitoire : $s(t) = s_p(t) + s_H(t)$
- Puis à la fin du régime transitoire, c'est le régime établi : $s(t) = s_p(t)$

Pour un système instable :

- $s_H(t)$ diverge, donc $s(t)$ s'éloigne de $s_p(t)$

⚠ En électronique, quand l'entrée e(t) est sinusoïdale (régime sinusoïdal forcé), la solution particulière est également sinusoïdale.

La solution $s(t) = s_0 \left|\underline{H}(j\omega)\right| \cos(\omega t + \varphi')$

EST la solution particulière correspondant au régime permanent.

Pour que cette solution soit effectivement observée une fois le régime transitoire terminé, il est nécessaire que $s_H(t)$ tende vers 0, c'est à dire qu'il faut au préalable s'assurer que le système est stable.

Nous allons maintenant étudier en détail la stabilité des systèmes linéaires d'ordre 1 et 2, et donner un critère de stabilité directement à partir des fonctions de transfert.

a) Stabilité d'un système d'ordre 1

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p} = \frac{s}{e} \quad \text{avec} \quad b_0 \neq 0 \text{ et } b_1 \neq 0$$

donc $(b_0 + b_1 p)\, s = \underbrace{(a_0 + a_1 p)\, e}_{\text{second membre}}$

Équation sans second membre : $b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} = 0 \quad (1)$

de solution $s_H(t) = A\, e^{-\frac{b_0}{b_1} t} \longrightarrow 0$ stable si b_0 et b_1 même signe

$\longrightarrow \pm\infty$ instable si b_0 et b_1 de signes opposés

Remarque : l'équation caractéristique (EC) de (1) est :

$b_0 + b_1 r = 0$ → c'est le polynome au dénominateur de $H(p)$!

b) Stabilité d'un système d'ordre 2

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{S}{E} \quad \text{avec} \quad b_0 \neq 0,\ b_1 \neq 0 \text{ et } b_2 \neq 0$$

L'équation sans second membre est donc :

$$b_0 s(t) + b_1 s'(t) + b_2 s''(t) = 0 \qquad (2)$$

d'équation caractéristique (EC) $b_2 r^2 + b_1 r + b_0 = 0$

$$\Delta_{EC} = b_1^2 - 4 b_0 b_2$$

- Cas $\Delta > 0$ $\quad (b_1^2 > 4 b_0 b_2)$ solutions de l'EC : $r_{1,2} = \dfrac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2}$

La solution de (2) est donc $s_H(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

le système est stable $\Leftrightarrow$ $r_1 < 0$ ET $r_2 < 0$

$\Leftrightarrow$ $r_1 + r_2 < 0$ ET $r_1 \cdot r_2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $-\dfrac{b_1}{b_2} < 0$ ET $\dfrac{b_1^2 - \Delta}{b_2^2} > 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{b_1}{b_2} > 0$ ET $b_0 b_2 > 0$

stable $\Leftrightarrow$ b_0, b_1 et b_2 de même signe

- Cas $\Delta = 0$ $\quad (b_1^2 = 4 b_0 b_2)$ $\qquad b_0$ et b_2 sont de même signe

sol de l'EC : $r_{double} = \dfrac{-b_1}{2 b_2}$

solution $s_H(t) = (A + Bt)\, e^{rt}$

syst stable $\Leftrightarrow$ $r < 0$

stable $\Leftrightarrow$ b_1 et b_2 de même signe

Or b_0 est déjà de même signe que b_2 donc

stable $\Leftrightarrow$ b_0, b_1, b_2 de même signe

- Cas $\Delta < 0$ $\quad (b_1^2 < 4 b_0 b_2)$ sol EC : $\underline{r} = \dfrac{-b_1 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2b_2}$ dans $\mathbb{C}$!

$$s_H(t) = A\, e^{Re\, t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $Re = Re(\underline{r}) = \dfrac{-b_1}{2b_2}$ et $\omega = Im(\underline{r}) = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2b_2}$

système stable $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-b_1}{2b_2} < 0$ $\Leftrightarrow$ b_1 et b_2 de même signe

Or $4 b_0 b_2 > b_1^2 > 0$ donc b_0 et b_2 sont de même signe

Conclusion

Filtre d'ordre 1 stable $\Leftrightarrow$ b_0 et b_1 de même signe

Filtre d'ordre 2 stable $\Leftrightarrow$ b_0, b_1 et b_2 de même signe

Ce résultat simple va nous permettre de donner un critère de stabilité directement à partir de la fonction de transfert.

2) A partir de la fonction de transfert

On a $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$

L'équation caractéristique est donnée par $D(p)$

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients b_i du polynome $D(p)$ au dénominateur de la fonction de transfert $H(p)$ sont de même signe

Remarque : Tous les sytèmes passifs en électronique sont stables (associations de R, L, C, ...)

Il faut au moins un composant actif apportant de l'énergie pour rendre le système instable et provoquer une divergence.

Cela pourra être le cas quand nous introduirons les A.L.I. (Amplificateurs Linéaires Intégrés) qui seront étudiés dans un chapitre ultérieur.

⟶ Exemple : traiter les exemples suivants :

- L'oscillateur harmonique amorti en mécanique
- Le circuit RLC en électricité

pour constater que l'équation différentielle sans second membre contient 3 coefficients tous positifs

⇒ ces systèmes (passifs) sont stables