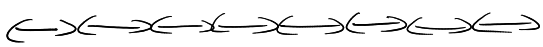
Introduction aux ondes :
Propagation 1D non dispersive
Equation de d'Alembert

I) Établissement d'une équation de d'Alembert

Ondes longitudinales : l'oscillation s'effectue dans la même direction que la direction de propagation



→ direction de propagation

- Acoustique dans les fluides (air, eau)
- Certaines vibrations dans les solides

Ondes transversales : l'oscillation s'effectue dans la direction transverse par rapport à la direction de propagation



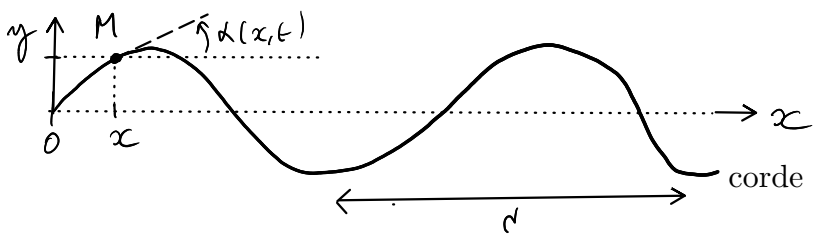
→ direction de propagation

- corde vibrante
- vagues à la surface de la mer
- ondes électromagnétiques (lumière, radio, ...)
- certaines vibrations dans les solides

Exemple de la corde vibrante

Considérons une corde vibrante, horizontale à l'équilibre.

Notons y(x,t) son écart par rapport à la position d'équilibre (repos) et $\alpha(x,t)$ l'angle de la corde par rapport à l'horizontale



Hypothèses du modèle :

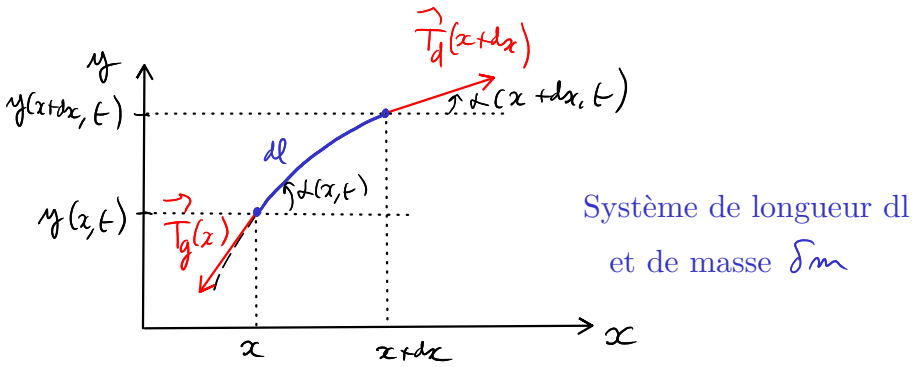
- → Corde supposée quasi-inextensible
- → Le poids n'est pas pris en compte (ne fait que modifier la position d'équilibre)
- → La corde est horizontale à l'équilibre
- → Chaque point de la corde oscille verticalement et les oscillations sont petites :

$$\alpha(x,t) \ll 1 \iff y(x,t) \ll \lambda \quad \text{(longueur d'onde)}$$

On effectuera un développement limité à l'ordre 1 en α du mouvement

On considère que la corde est homogène de masse linéïque $\mu = cte$ et que la tension est tangentielle à la corde.

Soit un élément corde de comprise compris entre x et $(x+dx)$ de longueur dl et de masse $\delta m = \mu dl$:



Système de longueur dl et de masse δm

- Système : bout de corde de masse δm

Bilan des forces : $\vec{T}_g(x)$ du reste de la corde située à gauche ; $\vec{T}_d(x+dx)$ du reste de la corde située à droite

- poids non pris en compte (cf hypothèses)

Notons $T(x)$ la norme de $\vec{T}_g(x)$ ou $\vec{T}_d(x)$ (principe d'action/réaction : $\vec{T}_g(x) = -\vec{T}_d(x)$)

Principe fondamental de la dynamique appliqué à δm :

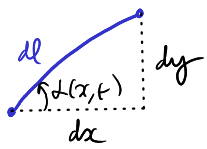
$$\delta m \, \vec{a} = \vec{T}_d(x+dx) + \vec{T}_g(x)$$

Projetons sur x et y (mouvement vertical) :

$$(1) \quad \delta m \cdot 0 = T(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) - T(x)\cos(\alpha(x))$$

$$(2) \quad \delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) - T(x)\sin(\alpha(x))$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 en α :



$\cos\alpha = 1$

$\sin\alpha = \alpha$

et $dx = dl\cos\alpha$ donc $dl = dx$

et $\delta m = \mu\, dl = \mu\, dx$

(1) devient : $0 = T(x+dx) - T(x)\ \forall x$, donc $T(x) = T_0$ constante

(2) devient : $\mu\, dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T_0\,\alpha(x+dx) - T_0\,\alpha(x)$

soit $\mu\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\, \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx}$

et en faisant tendre dx vers 0 : $\mu\, \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0\, \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}$ (3)

Or à l'ordre 1 en α : $\alpha(x,t) = \tan(\alpha(x,t)) = \frac{dy}{dx}$, soit, en injectant dans (3)

$\mu\, \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

et donc $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ $\frac{\mu}{T_0}$ est homogène à $\frac{1}{v^2}$ avec v une vitesse

On écrit : $\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$ Équation de d'Alembert 1D

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$ la célérité de l'onde

II) Solution des équations de d'Alembert

1) Solution générale : les ondes prograessives

La solution de l'équation de d'Alembert 1D est de la forme :

$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$f(x-ct)$ est appelée onde progressive (+) (OPH+)

$g(x+ct)$ est appelée onde progressive (-) (OPH-)

Vérification : $f(u)$ avec $u = x - c.t$ solution ?

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot \frac{df}{du}$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \frac{d^2 f}{du^2} = 0$ CQFD

Solution générale = (OPH +) + (OPH -)

Interprétation :

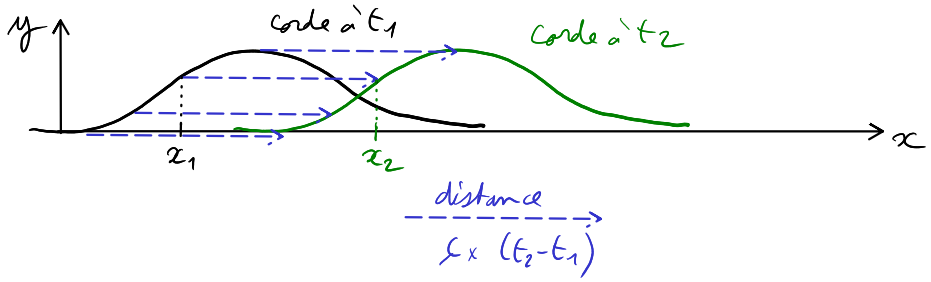
Une onde progressive (+) de la forme $f(x-ct)$ se propage sans se déformer à la vitesse c, dans le sens des x croissants

Démonstration : si $(x - ct) = te$ alors $f(x-ct) = te$

Soit un instant t_1 et une position x_1

à $t_2 > t_1$: $x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$

En se plaçant à t_2 et x_2, comme $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$, alors f sera la même. En faisant le raisonnement pour tous les points x, il suffit de décaler de $\Delta x = c(t_2 - t_1)$ pour que f soit conservée :



2) Cas de l'onde progressive harmonique (OPH)

Les ondes sont souvent périodiques, donc décomposables en série de Fourier : c'est un cas particulier des ondes progressives

$f(x,t) = A\cos(k(x-ct)-\varphi) = A\cos(kx-kct-\varphi)$

soit $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ OPH+

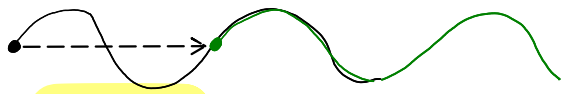
et $g(x,t) = B\cos(\omega t + kx + \varphi')$ OPH−

en notant $\omega = kc$

k est appelé le nombre d'onde (en m^{-1}) et $\vec{k} = k\vec{u}_x$ le vecteur d'onde

ω est la pulsation (en rad/s) $\vec{u}_x$ direction de propagation

λ est la longueur d'onde (en m) c'est la période spatiale de l'onde



$\lambda = c \times T$ car prendant une durée T (période), l'onde a avancé d'un "motif" (soit 1 λ)

donc $\lambda = \frac{c}{f}$

→ Vérifions que $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \varphi)$ est solution de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\rightarrow -Ak^2\cos(\omega t - kx + \varphi) - \frac{1}{c^2}A(-\omega^2)\cos(\omega t - kx + \varphi) = 0$$

$$\text{soit } k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega^2 = k^2c^2$$

$(\omega > 0 ; k > 0)$

donc $\omega = kc$: la relation entre ω et k est appelée relation de dispersion

Notations complexes :

$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \varphi) \rightarrow$ $\mathbb{C}$

$$\underline{f} = A e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$

$$\underline{f} = \underbrace{A e^{j\varphi}}_{\underline{A}} e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{f} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - kx)}$$

3) Les ondes stationnaires

Il y a 2 manières d'aborder les ondes stationnaires :

(1) Cas de la réflexion totale d'une onde progressive harmonique

Soit une OPH+ qui subit une réflexion totale en bout de corde, et créé donc une OPH-.

Les 2 ondes de même amplitude se croisent, et se superposent :

$$y(x,t) = \overbrace{A\cos(\omega t - kx + \varphi)}^{\text{OPH+}} + \overbrace{A\cos(\omega t + kx + \varphi')}^{\text{OPH-}}$$
$$= 2A\cos\left(\omega t + \frac{\varphi+\varphi'}{2}\right).\cos\left(kx - \frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$$

La solution est donc une solution à variables séparées de la forme :

$$y(x,t) = B\underbrace{\cos(k_2 x + \varphi_1)}_{\text{fonction de x}}.\underbrace{\cos(\omega t + \varphi_2)}_{\text{fonction de t}}$$

(2) Méthode 2 : recherche d'une solution à variables séparées :

Recherchons une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :

$y(x,t) = f(x).g(t)$ à variables séparées

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x)\,g(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x)\,g''(t)$$

donc $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0$

soit $f''(x)\,g(t) = \frac{1}{c^2}f(x)g''(t)$.

Séparons les variables : $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)}$

Ne dépend que de x pas de t = Ne dépend que de t pas de x → c'est donc une constante d'unité m^{-2}

Cette constante est négative, car sinon les solutions seraient exponentielles et non périodiques.

Notons cette constante $(-k^2)$:

$$\begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)} = -k^2 \\ \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = -k^2 \end{cases}$$

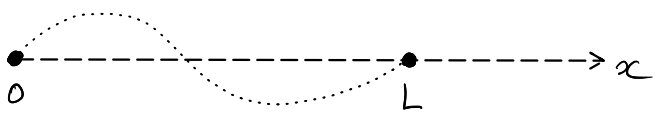
soit : $\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \\ g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 \end{cases}$ solution $f(x) = A' \cos(kx + \varphi_1)$ solution $g(t) = A'' \cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\omega = kc$

donc $y(x,t) = B \cos(kx + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\omega = kc$

solution identique à eelle obtenue avec la méthode précédente

3) Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités

Soit une corde fixée à ses 2 extrémités $x = 0$ et $x = L$



Les conditions aux limites sont : $y(x=0,t) = 0 \quad \forall t$

$y(x=L,t) = 0 \quad \forall t$

L'onde progressive est incompatible avec ces conditions aux limites

Les ondes stationnaires de la forme $y = f(x) g(t)$ conviennent car aux x tels que $f(x) = 0$ on a $y(x,t) = 0 \quad \forall t$.

Cherchons des solutions périodiques parmis les ondes stationnaires, soit de la forme :

$$y(x,t) = A \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

→ Cette solution doit vérifier l'équation de d'Alembert, donc $\omega = kc$

→ Cette solution doit aussi vérifier les conditions aux limites

- en $x = 0$: $y(0,t) = A \sin\varphi_1 \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \quad \forall t$

  Or $A \neq 0$ (solution nulle : sans intérêt) donc $\sin\varphi_1 = 0$ donc $\varphi_1 = 0$

- en $x = L$: $y(L,t) = A \sin(kL) \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \quad \forall t$

  $A \neq 0$ donc $\sin(kL) = 0$ donc $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

  soit $k_n = n\frac{\pi}{L}$

  Or $\omega = kc$ donc $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ et $f_n = n\frac{c}{2L}$

Les fréquences $f_n = n\frac{c}{2L}$ sont appelées fréquences propres

et sont les fréquences spontanées (propres) de la corde oscillant librement.

Recherchons les longueurs d'onde λ_n associées : $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

soit $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$ et donc $L = n.\frac{\lambda_n}{2}$

Interprétation : $\frac{\lambda_n}{2}$ est la distance entre 2 noeuds de vibration

Un noeud de vibration est un point où $y(x,t) = 0 \quad \forall t$

Les 2 extrémités $x=0$ et $x=L$ étant des noeuds, il faut forcément que L, la distance entre les 2 bouts, soit un multiple entier de $\frac{\lambda_n}{2}$.

Vérifions que la distance entre 2 noeuds est $\frac{\lambda}{2}$:

$$y(x,t) = B \sin(k_2 x) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Les noeuds sont situés aux x tels que $\sin(k_2 x) = 0$, c'est à dire quand k.x est un multiple de π . En appelant Δx la distance entre 2 noeuds successifs, c'est à dire 2 zéros successifs de $\sin(k_2 x)$. On a donc :

$k_2 \Delta x = \pi$ soit $\Delta x = \frac{\pi}{k_2}$. Or $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

Représentation de la corde pour divers n :

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$